מתמטיקה בדידה 1- תשפ"ו - מועד א' - 19/02/26

חלק א׳- שאלות פתוחות- 40 נק׳

שאלה 1 (20 נק׳)

א. (10 נק׳) תהיינה A, B, C, D קבוצות כלשהן.

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה; **אם נדרש להוכיח לא ניתן להוכיח באמצעות טבלת אמת.**

$$(A \cup C)\backslash(B \cup D) = (A\backslash B) \cup (C\backslash D)$$

ב. (10 נק׳) הוכיחו באינדוקציה מתמטית שלכל $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots + \frac{2n}{2^{2n}} = 2 - \frac{2n+2}{2^{2n}}$$

שאלה 2 (20 נק׳)

נגדיר יחס R מעל $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ באופן הבא:

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ : \ (a,b)\ R\ (c,d) \leftrightarrow \ a \le c \ \wedge \ ab^2 \mid cd^2$$

א. (8 נק') הוכיחו ש-R הוא יחס סדר חלקי מעל $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

ב. (4 נק') האם R הוא יחס סדר מלא מעל $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$? אם כן, הוכיחו. אם לא, תנו דוגמה נגדית.

ג. (8 נק') נתבונן בקבוצה $\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$.

ציירו דיאגרמת הסה של $(\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}, R)$.

רשמו מי הם האיברים המינימליים ומי הם האיברים המקסימליים, אם אכן קיימים כאלו.

האם יש איבר קטן ביותר? האם יש איבר גדול ביותר? אם כן, מצאו אותם ונמקו.

מהו רוחב היחס? ומהו אורך היחס?

חלק ב׳- שאלות ברירה- 60 נק׳

לפניכם 6 שאלות ברירה.
בכל שאלה עליכם לסמן את התשובה הנכונה מבין 4 האפשרויות הרשומות.

שאלה 1

נתון הפסוק הבא:

$$\neg\Big(\forall x \exists y\ \big((x \in \mathbb{N} \wedge\ y \in \mathbb{N}\ \wedge\ x > y)\ \rightarrow \exists z\ (z \in \mathbb{R}\ \wedge\ z \neq y + x)\big)\Big)$$

מה הפסוק השקול לוגית לפסוק זה ללא שימוש מפורש בקשר השלילה ?

א.

$$\exists x \forall y\big((x \in \mathbb{N} \wedge\ y \in \mathbb{N}\ \wedge\ x > y)\ \wedge\ \forall z\ (z \notin \mathbb{R}\ \vee\ z = y + x)\big)$$

ב.

$$\exists x \forall y\big((x \in \mathbb{N} \wedge\ y \in \mathbb{N}\ \wedge\ x > y)\ \rightarrow\ \forall z\ (z \notin \mathbb{R}\ \vee\ z = y + x)\big)$$

ג.

$$\exists x \forall y\big((x \notin \mathbb{N} \vee\ y \notin \mathbb{N}\ \vee\ x \leq y)\ \wedge\ \exists z\ (z \notin \mathbb{R}\ \vee\ z = y + x)\big)$$

ד.

$$\exists x \forall y\big((x \in \mathbb{N} \wedge\ y \in \mathbb{N}\ \wedge\ x > y)\ \wedge\ \forall z\ (z \notin \mathbb{R}\ \wedge\ z = y + x)\big)$$

שאלה 2

תהי $A = \{1, 3, \{\emptyset, \{3\}\}\}$. איזו מהטענות הבאות נכונה <u>בהכרח</u>?

א. $\{1\} \subseteq A$

ב. $\emptyset \in A$

ג. $\{\emptyset, 1\} \subseteq A$

ד. $\{1, \{3\}\} \subseteq A$

שאלה 3

יהי $A \equiv (\neg p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow q)$. מהי צורת ה- CNF השלמה של A ?

א. $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$

ב. $(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

ג. $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

ד. $(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$

שאלה 4

איזה מהטיעונים הבאים הוא טיעון תקף?

א. $\big((p \uparrow q) \downarrow (q \uparrow r)\big) \wedge r \Rightarrow p$

ב. $\big((p \uparrow q) \downarrow (q \uparrow r)\big) \vee r \Rightarrow q$

ג. $\big((p \uparrow q) \uparrow (q \uparrow r)\big) \wedge p \Rightarrow r$

ד. $(p \oplus q) \wedge \big((p \rightarrow r) \vee (r \uparrow q)\big) \Rightarrow q$

שאלה 5

תהי הקבוצה $A = \{1,2,3,4,\dots,12\}$.

נגדיר יחס <u>שקילות</u> R מעל A באופן הבא:

$$\forall a,b \in A: \quad (\quad aRb \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}: \quad ab = k^2 \quad)$$

מהו האינדקס של יחס השקילות R מעל A ?

א. 8

ב. 9

ג. 7

ד. 10

<u>שאלה 6</u>

תהיינה A,B קבוצות כלשהן. איזו מבין הטענות הבאות היא הטענה הנכונה בהכרח?

א. על מנת שיתקיים: $(A \times A) \cup (B \times B) = (A \cup B) \times (A \cup B)$ **<u>הכרחי ומספיק</u>** שיתקיים $A \subseteq B \ \vee \ B \subseteq A$.

ב. על מנת שיתקיים: $(A \times A) \cup (B \times B) = (A \cup B) \times (A \cup B)$ **<u>הכרחי אך לא מספיק</u>** שיתקיים $A \subseteq B \ \vee \ B \subseteq A$.

ג. על מנת שיתקיים: $(A \times A) \cup (B \times B) = (A \cup B) \times (A \cup B)$ **<u>מספיק אך לא הכרחי</u>** שיתקיים $A \subseteq B \ \vee \ B \subseteq A$.

ד. על מנת שיתקיים: $(A \times A) \cup (B \times B) = (A \cup B) \times (A \cup B)$ **<u>לא הכרחי ולא מספיק</u>** שיתקיים $A \subseteq B \ \vee \ B \subseteq A$.